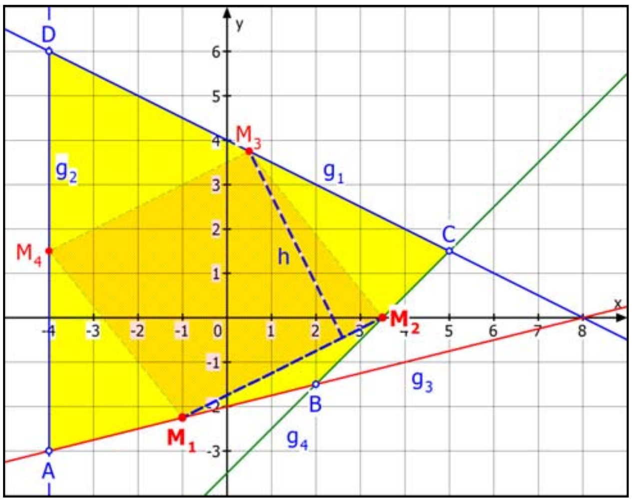


Analytische Geometrie

Vierecke

Große
AUFGABENSAMMLUNG

Datei Nr. 20051

Stand 20. Mai 2024

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Inhalt:

Formelsammlung

Die **Gleichung einer** Geraden lautet:

Wenn sie nicht parallel zur y-Achse ist: $y = mx + n$ (1)

Wenn sie parallel zur y-Achse ist: $x = c$ (2)

Es gibt Spezialfälle zu (1):

Eine Ursprungsgerade hat n = 0: $y = m \cdot x$

Die 1. Winkelhalbierende ist: $y = x$

Die 2. Winkelhalbierende ist: $y = -x$

Zum **Aufstellen einer Geradengleichung** muss man zuerst ihre Steigung berechnen:

Steigung einer Geraden durch 2 Punkte: $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ kurz: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (3)

wobei Δy die Differenz der y-Koordinaten
und Δx die Differenz der x-Koordinaten bedeutet

Dann gibt es zwei Methoden, um die Geradengleichung zu finden:

1. **Die Punktsteigungsform** lautet: $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ (4)

   Hier setzt man für m die Steigung ein und

   für x_1 und y_1 die Koordinaten eine Punktes der Geraden.

2. Man kann auch m in die **Gleichung (1)** einsetzen, dann fehlt aber noch n.

   n erhält man, indem man für x und y die Koordinaten eine Punktes der Geraden einsetzt.

Hinweis: Die Verwendung der Punktsteigungsform ist kürzer.

Senkrecht stehende (orthogonale) Geraden:

Für ihre Steigungen gilt die Beziehung $m_1 \cdot m_2 = -1$ bzw. $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

In Worten: Die eine Steigung ist der negative Kehrwert der anderen.
Das gilt nur, wenn die Geraden nicht parallel zu den Koordinatenachsen sind.

Schnittwinkel zweier Geraden: $\tan\gamma_1 = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$

Diese Formel gilt natürlich nur, wenn keine Gerade parallel zur y-Achse ist.

Der Betrag sorgt dafür, dass der Tangenswert positiv wird. Dies ergibt einen Schnittwinkel unter 90°. Wird in der Formel der Nenner Null. Sind die Geraden orthogonal.

Hat eine der Geraden die Steigung 0 (weil sie parallel zur x-Achse ist), dann ist $\tan\gamma = |m|$

Länge einer Strecke: $e = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ bzw. $e = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Mittelpunkt einer Strecke: $x_M = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ und $y_M = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$

Schwerpunkt eines Dreiecks: $x_S = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ und $y_S = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$

Vierecksaufgaben

Aufgabe 1

Lösung Seite 9

Gegeben ist das Viereck ABCD durch $A(-3|-1)$; $B(5|-3)$; $C(3|5)$; $D(-1|4)$.

a) Berechne den Umfang des Vierecks und die Länge der Diagonalen.

b) Hat das Viereck einen rechten Winkel?
Beweise im „Ja-Fall" deine Aussage durch die Umkehrung des Satzes von Pythagoras oder durch einen Steigungsbeweis.

c) Ändere D so in D‘ ab, dass ABCD‘ ein Drachen ist, der zu ABCD flächengleich ist.

Aufgabe 2

Lösung Seite 66

Gegeben sind die Geraden:

$g_1: \ y = -\frac{1}{3}x + 5$, $g_2: \ y = -7x + 15$, $g_3: \ y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$, $g_4: \ y = x - 9$.

a) Zeichne sie in ein Achsenkreuz (x-Achse 0 bis 11, y-Achse -4 bis 5, Längeneinheit 1 cm).

b) Diese Geraden begrenzen ein Viereck ABCD. Berechne die Schnittpunkte
$\{A\} = g_2 \cap g_3$, $\{B\} = g_3 \cap g_4$, $\{C\} = g_4 \cap g_1$ und $\{D\} = g_1 \cap g_2$.

c) Stelle die Gleichungen der Diagonalen (e) = (AC) und (f) = (BD) auf.
Berechne deren Schnittpunkt S.

d) Zeige, dass das Viereck ein Trapez ist. Berechne seinen Flächeninhalt.
Anleitung: Stelle daher die Gleichung der Lotgeraden von A auf CD auf und berechne damit den Lotfußpunkt auf CD. Berechne dann die Höhe.

Aufgabe 3

Lösung Seite 7

Gegeben sind die Geraden:

$g_1: \ y = \frac{11}{2}x + 19$, $g_2: \ y = -\frac{1}{2}x - 5$, $g_3: \ y = \frac{11}{2}x - 41$, $g_4: \ y = -\frac{1}{2}x + 7$.

a) Zeichne sie in ein Achsenkreuz (x-Achse -4 bis 8, y-Achse -8 bis 8, Längeneinheit 1 cm).

b) Diese Geraden begrenzen ein Viereck ABCD. Berechne die Schnittpunkte
$\{A\} = g_4 \cap g_1$, $\{B\} = g_1 \cap g_2$, $\{C\} = g_2 \cap g_3$ und $\{D\} = g_3 \cap g_4$.

c) Stelle die Gleichungen der Diagonalen (e) = (AC) und (f) = (BD) auf.
Berechne deren Schnittpunkt M.

d) Bestimme die Art des Vierecks. Berechne seinen Flächeninhalt.

Aufgabe 4

Lösung Seite 17

Gegeben sind die vier Geraden:

$g_1: \; y = -\frac{1}{2}x + 4 , \quad g_2: \; x = -4 , \quad g_3: \; y = \frac{1}{4}x - 2 \quad \text{und} \quad g_4: \; y = x - \frac{7}{2}$

Sie begrenzen ein Viereck, in dessen Innern der Ursprung liegt.

a) Zeichne das Viereck und berechne die vier Eckpunkte.

b) Zeige, dass die Seitenmittelpunkte ein Parallelogramm bilden.
Berechne den Inhalt dieses Parallelogramms.

Aufgabe 5

Lösung Seite 20

Gegeben ist das Viereck ABCD durch $A(-2\,|\,-1)$, $B(3\,|\,-2)$, $C(4\,|\,3)$ und $D(-1\,|\,4)$.

a) Stelle die Gleichungen der vier Seitengeraden auf. Was kann man über ihre Lage sagen und was folgt daraus über das Viereck?

b) Berechne die Längen der Viereckseiten und seinen Flächeninhalt.
Was für ein Viereck liegt vor (Begründung!).

c) Berechne den Schnittpunkt M der Diagonalen. Zeige, dass sich die Diagonalen gegenseitig halbieren!

d) Zeichne den Umkreis des Quadrats ein. Er scheint durch den Punkt $P(4\,|\,-1)$ zu gehen.
Prüfe durch eine Rechnung nach, ob P auf dem Kreis liegt!

Aufgabe 6

Lösung Seite 22

Gegeben ist das Viereck ABCD durch $A(-2\,|\,1)$, $B(1\,|\,-4)$, $C(9\,|\,2)$ und $D(7\,|\,7)$.

a) Stelle die Gleichungen der vier Seitengeraden auf. Was kann man über ihre
Lage sagen und was folgt daraus über das Viereck?

b) Berechne die Längen der Viereckseiten

c) Berechne den Schnittpunkt der Diagonalen.

d) Berechne die Mittelpunkte M_a , M_b, M_c und M_d der Viereckseiten.
Zeige, dass sie ein Parallelogramm bilden. Berechne die Länge seiner Seiten.

Aufgabe 7

Lösung Seite 24

Gegeben ist ein Viereck ABCD durch $A(6\,|\,-1)$, $B(-3\,|\,-3)$, $C(-1\,|\,6)$ und $D(4\,|\,4)$.

a) Zeichne das Viereck in ein Achsenkreuz mit Längeneinheit 1 cm.
Stelle die Gleichungen der Seitengeraden auf.

b) Zeige durch Rechnung, dass ABCD ein symmetrischer Drachen ist.
(Anleitung: Dazu sind zwei Indizien zu überprüfen!)

c) Berechne den Inhalt des Drachens.

d) Die Mittelpunkte R, S, T, U des Drachens bilden ein Viereck. Untersuche seine Art.

Aufgabe 8

Lösung Seite 26

Gegeben sind die Punkte $A(-1|-3)$, $B(6|1)$, $C(7|9)$ und $D(-6|9)$.

a) Zeichne das Viereck in ein Achsenkreuz (Längeneinheit 1 cm).
Stelle die Gleichungen der Seitengeraden auf.

b) Berechne den Schnittpunkt der Diagonalen.

c) Welchen Umfang und welchen Inhalt hat das Viereck?

d) Identifiziere das Viereck als besonderen Typ.
Begründe die Beweisstrategie gut!

e) Berechne die Mittelpunkte M_a, M_b, M_c und M_d der Viereckseiten,
zeichne sie ein und verbinde sie zu einem neuen Viereck.
Um was für einen Vierecktyp handelt es sich hier?
Begründung durch Rechnung.

Aufgabe 9

Lösung Seite 29

Gegeben ist ein Viereck ABCD durch die Punkte:

$$A(-5|-1),\quad B(3|-2),\quad C(5|4)\quad \text{und}\quad D(-1|6).$$

a) Zeichne das Viereck in ein Achsenkreuz mit Längeneinheit 1 cm.

b) Zeige durch Rechnung, dass ABCD ein symmetrischer Drachen ist.
(Anleitung: Dazu sind zwei Indizien zu überprüfen!)

c) Berechne den Inhalt des Drachens ($A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$, e und f sind die Diagonalen).

d) Zeige, dass die Mittelpunkte R, S, T, U des Drachens ein Parallelogramm bilden.

e) Die Gerade p sei die Parallele zu CD durch A und q sei die Gerade durch B und C.
p und q schneiden sich in einem Punkt Z. Berechne den Inhalt des Trapezes AZCD.

Aufgabe 10

Lösung Seite 33

Gegeben ist das Viereck ABCD mit $A(-1|-1)$, $B(7|0)$, $C(3|7)$ und $D(-5|6)$.

a) Berechne die Steigungen und die Längen der Seiten.
Was für ein Viereck liegt vor (den Grund angeben!)

b) Berechne die Gleichungen der Diagonalen, ihren Schnittpunkt und ihre Länge.
Welchen Flächeninhalt hat das Viereck?

c) Was für ein Viereck bilden die Mittelpunkte der Viereckseiten? Nachweis durch Rechnung!

Aufgabe 11

Lösung Seite 35

Gegeben ist ein Viereck durch folgende Geraden:

$$g:\ y = \tfrac{1}{2}x - 2\ ; \quad h:\ y = -x + 7 \qquad k:\ y = \tfrac{1}{2}x + 4 \qquad i:\ y = 2x + 4$$

a) Um was für ein Viereck handelt es sich? Beweis!
Berechne die Koordinaten der Eckpunkte.

b) Berechne den Flächeninhalt dieses Vierecks.

c) Berechne die **Innenwinkel** des Vierecks auf kürzeste Art
und den Diagonalenschnittpunkt.

Lösungen

Vierecke

Lösung Aufgabe 1

Gegeben ist das Viereck ABCD durch $A(-3|-1)$; $B(5|-3)$; $C(3|5)$; $D(-1|4)$.

a) Berechne den Umfang des Vierecks und die Länge der Diagonalen.

b) Hat das Viereck einen rechten Winkel?
Beweise im „Ja-Fall" deine Aussage durch die Umkehrung des Satzes von Pythagoras oder durch einen Steigungsbeweis.

c) Ändere D so in D' ab, dass ABCD' ein Drachen ist, der zu ABCD flächengleich ist.

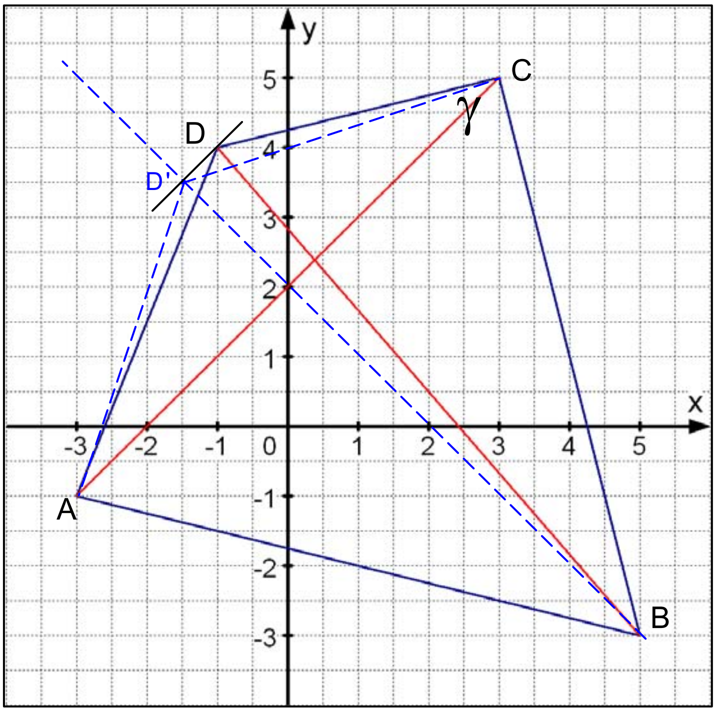
a) Seitenlängen:

$\overline{AB} = \sqrt{(5+3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{68}$ (LE)

$\overline{BC} = \sqrt{(3-5)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{68}$ (LE)

$\overline{CD} = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{17}$ (LE)

$\overline{AD} = \sqrt{(-1+3)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{29}$ (LE)



Umfang:

$U = 2 \cdot \sqrt{68} + \sqrt{17} + \sqrt{29} \approx 26$ (LE)

Diagonalen:

$\overline{AC} = \sqrt{(3+3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{72}$ (LE)

$\overline{BD} = \sqrt{(-1-5)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{85}$ (LE) .

b) Vermutung: $\gamma = 90^{\circ}$.

1. Beweis:

Wir prüfen nach, ob im Dreieck BDC der Satz des Pythagoras gilt: $\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 68 + 17 = 85 = \overline{BD}^2$

Dies ist tatsächlich der Fall, also ist auch wirklich $\gamma = 90^{\circ}$

2. Beweis: Steigung von BC: $m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-(-3)}{3-5} = \frac{5+3}{-2} = -4$

Steigung von CD: $m_{CD} = \frac{5-4}{3-(-1)} = \frac{1}{4}$

Weil die eine Steigung der negative Kehrwert der anderen Steigung ist, sind diese Seiten orthogonal!

c) Damit das Viereck ein Drachen wird, muss die Gerade (BD) zum Lot auf (AC) werden.

Dazu berechnet man die Steigung der Geraden (AC): $m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-(-1)}{3-(-3)} = \frac{6}{6} = 1$

Das Lot von $B(5|-3)$ auf (AC) hat daher die Steigung $m_L = -1$:

$$y + 3 = -(x-5) \Rightarrow y = -x + 5 - 3 \Rightarrow \boxed{y = -x + 2}.$$

Damit ABCD‘ flächengleich bleibt, muss man die Ecke D parallel zur Diagonalen (AC) verschieben, dann ändert sich die Höhe des Dreiecks ACD nicht. (Dies ist eine Scherung).

Parallele p zu (AC) durch $D(-1|4)$: p: $y - 4 = 1 \cdot (x+1) \Rightarrow y = x + 1 + 4 \Rightarrow \boxed{y = x + 5}$

Schnitt von L und p ergibt D’: $x + 5 = -x + 2 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x' = -\frac{3}{2}$

y-Koordinate: $y' = x' + 5 = -\frac{3}{2} + 5 = \frac{7}{2} = 3{,}5$

Ergebnis: $D'(-1{,}5 \mid 3{,}5)$

Lösung Aufgabe 2

Gegeben sind die Geraden

$g_1:\ y=-\frac{1}{3}x+5,\quad g_2:\ y=-7x+15,\quad g_3:\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3},\quad g_4:\ y=x-9.$

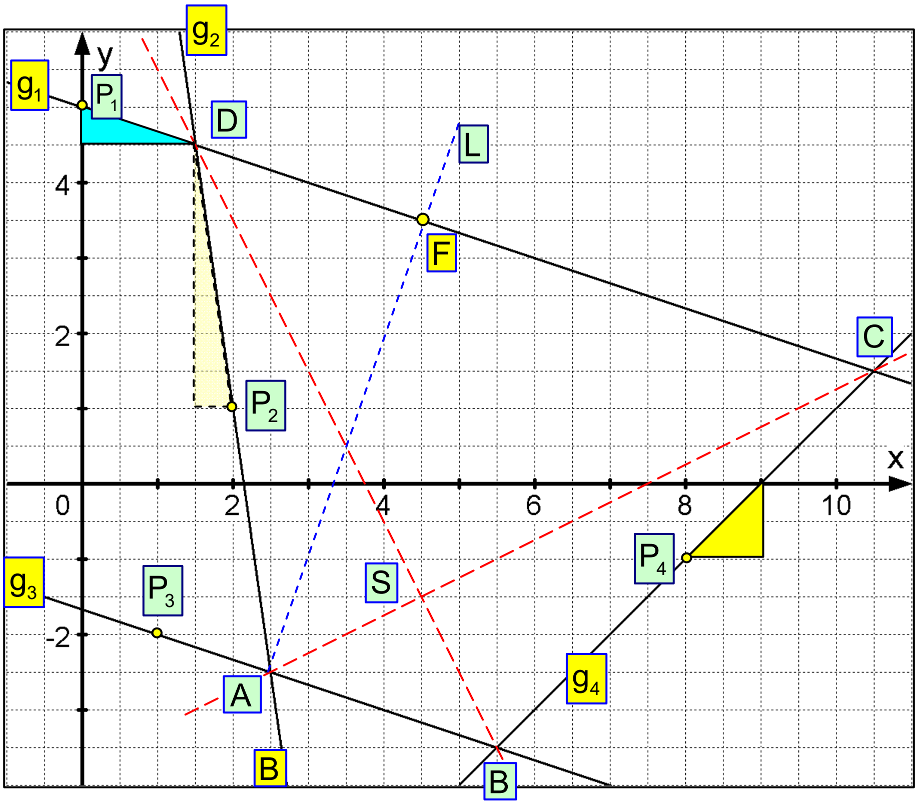
a) Zeichne sie in ein Achsenkreuz (x-Achse 0 bis 11, y-Achse -4 bis 5, Längeneinheit 1 cm).

b) Diese Geraden begrenzen ein Viereck ABCD. Berechne die Schnittpunkte $\{A\}=g_2\cap g_3$, $\{B\}=g_3\cap g_4$, $\{C\}=g_4\cap g_1$ und $\{D\}=g_1\cap g_2$.

c) Stelle die Gleichungen der Diagonalen (e) = (AC) und (f) = (BD) auf.
Berechne deren Schnittpunkt S.

d) Zeige, dass das Viereck ein Trapez ist. Berechne seinen Flächeninhalt.
Anleitung: Stelle daher die Gleichung der Lotgeraden von A auf CD auf und berechne damit den Lotfußpunkt auf CD. Berechne dann die Höhe.

Lösung



$g_1:\ y=-\frac{1}{3}x+5\ ;\ g_2:\ y=-7x+15\ ;\ g_3:\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}\ ;\ g_4:\ y=x-9\ .$

a) <u>**Hinweis zum Zeichnen der Geraden**</u>.

Die Gerade g_1 beginnt man beim y-Achsenabschnitt $P_1(0\,|\,5)$, der durch das Absolutglied + 5 festgelegt ist. Dann zeichnet man ein Steigungsdreieck, das bei der Steigung $m=-\frac{1}{3}$ um 1 Kästchen nach unten und um 3 Kästchen nach rechts führt bis D (blaues Dreieck). Dies klappt nicht bei g_2, denn deren y-Achsenabschnitt liegt mit 15 außerhalb des Zeichenbereichs. Daher berechnet man für g_2 einen anderen Punkt. Man nimmt z. B. x = 2 und setzt dies in die Gleichung von g_2 ein, was zu y = 1 führt. g_2 geht also durch $P_2(2\,|\,1)$. Von hier aus zeichnet man ein Steigungsdreieck zu m_2 = 7, etwa 1 Kästchen nach links und 7 nach oben (es führt in der Abbildung ebenfalls zu D).
Startpunkte P_3 für die Zeichnung von g_3 und P_4 für die Zeichnung von g_4 sind ebenfalls eingezeichnet: $P_3(1\,|-2)$ und $P_4(8\,|-1)$.

b) **Berechnung der Eckpunkte des Vierecks aus**

$g_1:\ y=-\frac{1}{3}x+5;\qquad g_2:\ y=-7x+15;\qquad g_3:\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3};\qquad g_4:\ y=x-9.$

(1) $\{A\}=g_2\cap g_3:$

$$\left\{\begin{array}{l} g_2:\ y=-7x+15 \\ g_3:\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}=-7x+15 \quad |\cdot 3 \quad \text{(Brüche beseitigen)}$$
$$-x-5=-21x+45 \quad |+21x+5$$
$$20x=50 \quad |:20 \quad \Rightarrow \quad x_A=\frac{5}{2}=2{,}5$$

Eingesetzt in g_2: $\quad y_B=-7\cdot\frac{5}{2}+15=-\frac{35}{2}+\frac{30}{2}=-\frac{5}{2}=-2{,}5 \quad \Rightarrow \quad A(2{,}5\,|-2{,}5)=\left(\frac{5}{2}\,|-\frac{5}{2}\right).$

(2) $\{B\}=g_3\cap g_4:$

$$\left\{\begin{array}{l} g_3:\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3} \\ g_4:\ y=x-9\end{array}\right\}$$

$$x-9=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3} \quad |\cdot 3$$
$$3x-27=-x-5$$
$$4x=22 \quad \Rightarrow \quad x_B=\frac{11}{2}=5{,}5$$

Eingesetzt in g_4: $\quad y_B=5{,}5-9=-3{,}5=-\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad B(5{,}5\,|-3{,}5)=\left(\frac{11}{2}\,|-\frac{7}{2}\right)$

(3) $\{C\}=g_4\cap g_1:$

$$\left\{\begin{array}{l} g_4:\ y=x-9 \\ g_1:\ y=-\frac{1}{3}x+5\end{array}\right\}$$

$$x-9=-\frac{1}{3}x+5 \quad |\cdot 3$$
$$3x-27=-x+15$$
$$4x=42 \quad \Rightarrow \quad x_C=\frac{21}{2}=10{,}5$$

Eingesetzt in g_4: $\quad y_C=10{,}5-9=1{,}5=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad C(10{,}5\,|\,1{,}5)=\left(\frac{21}{2}\,|\,\frac{3}{2}\right)$

(4) $\{D\}=g_1\cap g_2:$

$$\left\{\begin{array}{l} g_1:\ y=-\frac{1}{3}x+5 \\ g_2:\ y=-7x+15\end{array}\right\}$$

$$-\frac{1}{3}x+5=-7x+15 \quad |\cdot 3$$
$$-x+15=-21x+45$$
$$20x=30 \quad \Rightarrow \quad x_D=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Eingesetzt in g_2: $\quad y_D=-7\cdot\frac{3}{2}+15=-\frac{21}{2}+\frac{30}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5 \quad \Rightarrow \quad D(1{,}5\,|\,4{,}5)=\left(\frac{3}{2}\,|\,\frac{9}{2}\right)$

c) $A(2{,}5\,|-2{,}5)=\left(\frac{5}{2}\,|-\frac{5}{2}\right),\ B(5{,}5\,|-3{,}5)=\left(\frac{11}{2}\,|-\frac{7}{2}\right),\ C(10{,}5\,|\,1{,}5)=\left(\frac{21}{2}\,|\,\frac{3}{2}\right),\ D(1{,}5\,|\,4{,}5)=\left(\frac{3}{2}\,|\,\frac{9}{2}\right).$

Diagonale (AC): $\quad m_{AC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{\frac{21}{2}-\frac{5}{2}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y=\frac{1}{2}x-\frac{15}{4}}$

Diagonale (BD): $\quad m_{BD}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{11}{2}}=\frac{8}{-4}=-2 \quad \Rightarrow \quad y+\frac{7}{2}=-2\left(x-\frac{11}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y=-2x-\frac{15}{2}}$

Schnittpunkt S der Diagonalen: $\quad \frac{1}{2}x-\frac{15}{4}=-2x-\frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad x_S=\frac{9}{2},\ y_S=-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad S\left(4.5\,|-\frac{3}{2}\right)$

d) Zeige, dass das Viereck ein Trapez ist. Berechne seinen Flächeninhalt.
Anleitung: Stelle daher die Gleichung der Lotgeraden von A auf CD auf und berechne damit den Lotfußpunkt auf CD. Berechne dann die Höhe.

Das Viereck ist ein Trapez, weil die Gegenseiten AB und CD parallel sind. Dies liegt daran, dass die Steigungen der Geraden g_1 und g_3 gleich sind. Also sind sie parallel!

<u>Lot von A auf CD</u>:

Die Steigung von (CD = g_1 ist $-\frac{1}{3}$. Also ist die Steigung des Lotes davon der negative Kehrwert:

Lotgerade durch $A\left(\frac{5}{2} \mid -\frac{5}{2}\right)$: $\quad m_L = -\frac{1}{m_1} = 3 \quad \Rightarrow \quad y + \frac{5}{2} = 3\left(x - \frac{5}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = 3x - 10}$

Der Lotfußpunkt F ist der Schnittpunkt des Lotes mit g_1 :

$$3x - 10 = -\tfrac{1}{3}x + 5 \quad | \cdot 3$$
$$9x - 30 = -x + 15$$
$$10x = 45$$
$$x_F = 4{,}5 = \tfrac{9}{2}$$

Eingesetzt in L: $\quad y_F = 3 \cdot \frac{9}{2} - 10 = \frac{27}{2} - \frac{20}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

Ergebnis: $\quad F(4{,}5 \mid 3{,}5) = \left(\frac{9}{2} \mid \frac{7}{2}\right)$

<u>Berechnung de Flächeninhaltes:</u>

zu $A(2{,}5 \mid -2{,}5) = \left(\frac{5}{2} \mid -\frac{5}{2}\right)$, $B(5{,}5 \mid -3{,}5) = \left(\frac{11}{2} \mid -\frac{7}{2}\right)$, $C(10{,}5 \mid 1{,}5) = \left(\frac{21}{2} \mid \frac{3}{2}\right)$, $D(1{,}5 \mid 4{,}5) = \left(\frac{3}{2} \mid \frac{9}{2}\right)$.

Formel: $\quad A = m \cdot h = \frac{a+c}{2} \cdot h$

$$a = \overline{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \text{ (LE)}$$
$$c = \overline{CD} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = \sqrt{9 \cdot 10} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} = 3 \cdot \sqrt{10} \text{ (LE)}$$
$$h = \overline{AF} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot \sqrt{10} \text{ (LE)}$$

$$A = \frac{\sqrt{10} + 3 \cdot \sqrt{10}}{2} \cdot 2\sqrt{10} = \frac{{}^{2}\cancel{4} \cdot \sqrt{10}}{\cancel{2}} \cdot 2\sqrt{10} = 2 \cdot \sqrt{10} \cdot 2 \cdot \sqrt{10} = 4 \cdot 10 = 40 \text{ (FE)}$$